



توان و ریشه

وَ جَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ
هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم
(سوره انبیا، آیه ۳۰)



یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر
 $۳۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$ مولکول که می‌توان آن را به صورت $۳/۳ \times ۱۰^{۱۹}$
نمایش داد. هر گونه حیات به آب احتیاج دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم.

در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد (ناصفر) آشنا شده‌اید. به طور مثال می‌دانید:

$$2^3=8 \quad \text{و} \quad (-5)^2=25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{16} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5=\frac{-1}{32}$$

همچنین می‌دانید که اگر a عددی غیر صفر باشد، $a^0=1$.

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل 2^{-3} چیست؟ به کمک فعالیت زیر پاسخ سؤال بالا را می‌توان پیدا کرد.

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات داده شده پاسخ دهید:

۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}$
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2°	2°	2°	2°	2°

(آ) اعداد واقع در سطر اول جدول بالا با هم چه ارتباطی دارند؟

(ب) هر یک از اعداد واقع در سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟

(ج) توان‌های اعداد واقع در سطر دوم تا 2^0 با یکدیگر چه رابطه‌ای دارند؟

(د) اگر بخواهیم در جاهای خالی این الگو را ادامه دهیم، چه اعدادی را می‌توان نوشت؟

(ه) به کمک جدول بالا تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$2^{-3} =$$

$$2^{-4} =$$

$$2^{-5} =$$

به طور کلی اگر a یک عدد غیر صفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد، $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ (یعنی: $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$)

مثال:

$$1) \quad 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$3) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$$

$$2) \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$$

$$4) \quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$$

۱- با توجه به مثال‌های حل شده زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان‌دار با توان

طبیعی بنویسید.

آ) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

ب) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

ج) $(-2)^{-3} = \frac{1}{\quad} = \quad = \quad$

د) $(-\frac{2}{3})^{-4} = \quad = \quad = \quad$

به طور کلی اگر n یک عدد طبیعی و $a \neq 0$ آنگاه: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

۲- مانند نمونه هر عبارت را به عبارت نظیر آن وصل کنید.

3^{-2}	x^{-1}	$(xy)^{-1}$	$(-2)^2$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$	2^{-2}	xy^{-1}	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$
$\frac{1}{x}$	5^3	$\frac{1}{9}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	4

۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

آ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} =$

و) $1^{-2} =$

ب) $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} =$

ز) $\frac{(-3)^0}{3} =$

ج) $-(-5)^2 =$

ح) $-\frac{1}{2^{-2}} =$

د) $-(-5)^{-2} =$

ط) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 =$

ه) $-5^{-2} =$

ی) $2^0 - 2^{-1} =$

اگر m و n دو عدد طبیعی باشند و a یک عدد دلخواه باشد داریم: $a^m \times a^n = a^{m+n}$
 آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟
 با انجام فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای اعداد صحیح هم حدس زد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از حاصل ضرب‌های زیر چگونه به دست آمده است؟ توان صحیحی که در پاسخ وجود دارد با هر یک از توان‌های موجود در عبارت اولیه چه رابطه‌ای دارند؟

$$3^{-4} \times 3^6 = \frac{1}{3^4} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

$$5^2 \times 5^{-7} = \dots\dots\dots$$

در حالت کلی اگر m و n دو عدد صحیح باشند و a یک عدد دلخواه (غیر صفر)، رابطه زیر برقرار است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال:

$$2^3 \times 2^{-5} \times 2^{-4} = 2^{3-5-4} = 2^{-6}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^2) \times (4x^3) = 24x^{-1+2+3} = 24x^4 \quad (x \neq 0)$$

کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید:

$$5^{-7} \times 5^1 =$$

$$(-4)^{-9} \times (-4)^{-1} =$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^4 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-9} =$$

$$\left(\frac{1}{V}\right)^6 \times \left(\frac{1}{V}\right)^{-5} =$$

$$b^{-2} \times b^{-2} =$$

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^{-7} \times \left(\frac{X}{Y}\right)^{11} =$$

اگر a و b دو عدد مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح باشند، روابط زیر برقرارند:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{و} \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{و} \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad \text{و} \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^m = a^m \times b^m \quad \text{و} \quad a^0 = 1$$

مثال:

$$\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2}$$

$$2^{-2} \times 5^{-2} = 10^{-2}$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \times 12^{-3} = \left(\frac{-2}{3} \times 12\right)^{-3} = (-8)^{-3}$$

$$\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^4 \cdot z^3} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-4} \cdot z^{1-3} = x^7 y^{-2} z^{-2} \quad x, y, z \neq 0$$

$$\frac{10^{-2^3}}{25 \cdot 2^{-1}} = \frac{10^{-8}}{25 \cdot (-1)} = \frac{2^1}{2^6} = 2^{1-6} = 2^{-5}$$

تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ ارائه شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$\text{آ) } 3^{-2} \begin{cases} \frac{1}{9} \\ -6 \end{cases}$$

$$\text{ب) } 3^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -3 \end{cases}$$

$$\text{ج) } 3^{-1} \times 4^{-1} \begin{cases} 12^{-1} \\ 7^{-1} \end{cases}$$

$$\text{د) } 3^{-1} + 4^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ 7^{-1} \end{cases}$$

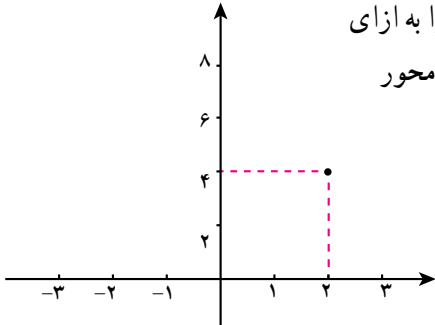
$$\text{ه) } 5^{-2} \begin{cases} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \end{cases}$$

$$\text{و) } (-2)^3 \begin{cases} 3^{-2} \\ -8 \end{cases}$$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود 10^{-24} گرم است. جرم یک انسان 10^0 کیلوگرمی چند برابر

جرم یک اتم هیدروژن است؟

۳- از محورهای مختصات استفاده کنید و 2^n را به ازای $n = 0$ و ± 1 و ± 2 و ± 3 روی محور نمایش داده شده است.



۴- در جاهای خالی علامت $>$ ، $<$ یا $=$ قرار دهید.

آ) $3^{-1} \bigcirc 3^{-2}$

ب) $2^0 \bigcirc 2^{-5}$

ج) $(0/5)^{-2} \bigcirc (0/6)^{-2}$

د) $5^{-1} \bigcirc 0$

ه) $\left(\frac{-8}{15}\right)^0 \bigcirc 1$

و) $-5^{-2} \bigcirc (-5)^{-2}$

۵- در هر یک از تساوی‌های زیر x چه عددی است؟

آ) $5^x \times 5^{-2} = 5^4$

ب) $5^x : 5^{-2} = 5^4$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

آ) $a^4 \times a^5 = a^9$

ه) $(-3)^0 + (3^{-1})^{-1} = 4$

ب) $a^4 \times a^5 = a^4$

و) $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-2}$

ج) $(a^m)^n = (a^n)^m$

ز) $6^{-2} = -\frac{2}{6}$

د) $3^{-2} = -9$

ح) $3^{-1} < 3^{-1}$

۷- مقدار عددی هر عبارت را به دست آورید:

آ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \times 27^{-3}$

ب) $(0/2)^{-4} \times 25^{-2}$

ج) $\left(\frac{15}{14}\right)^{-4} \times \left(\frac{45}{28}\right)^4$

د) $(-5^{-2})^{-1}$

۸- اعداد داده شده را از کوچک‌ترین تا بزرگ‌ترین و از چپ به راست مرتب کنید:

2^{-2} و 1^{-0} و $(-1)^2$ و $(-7)^2$ و $(-\frac{1}{2})^{-2}$ و 2^2 و $(-\frac{1}{2})^0$ و 5^{-2} و 2^{-2}

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$(0/987)^1 < 1^0$ $(1/2)^7 < (1/0.2)^7$ $\left(\frac{5}{4}\right)^2 < (0/7)^2$ $\left(\frac{3}{4}\right)^2 > (0/75)^2$

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

آ) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}}{-25 \times 2^{-8}}$

ب) $\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$

فعالیت

۱- در جدول زیر تعدادی عدد داده شده‌اند و حاصل ضرب آنها در توان‌های 10 یا حاصل تقسیم آنها بر توان‌های 10 خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که در هنگام ضرب یا تقسیم داده شده مکان ممیز چگونه تغییر می‌کند؟

عدد	تقسیم بر		تقسیم بر		تقسیم بر		تقسیم بر		تقسیم بر	
	ضرب در	10	ضرب در	100	ضرب در	1000	ضرب در	10^4	ضرب در	10^5
15										
0.2										
93										

۲- سرعت نور $300,000,000$ متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در 100 ساعت می‌پیماید چند متر است؟ راه حل این مسئله در ادامه داده شده است. توضیح دهید که حل چگونه به دست آمده است.

فاصله‌ای که نور در 100 ساعت می‌پیماید $300000000 \times 360000 = 360000000000$ ثانیه $3600 = 1$ ساعت
 ثانیه $360000 = 100$ ساعت

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هر کدام از این اعداد را به صورت یک عدد اعشاری مثبت یک رقمی در توانی از عدد 10 نمایش می‌دهند که به آن «نماد علمی» آن عدد می‌گویند، بنابراین:

$$300000000 = 3 \times 10^8$$

$$360000000000 = 3 \times 10^8 \times 360000 = 3 \times 10^8 \times 36 \times 10^4 = 108 \times 10^{12} = 1.08 \times 10^{14}$$

$$360000 = 36 \times 10^4$$

دقت کنید که حاصل ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است. این گونه نمایش به جز سهولت نوشتن، انجام محاسبات را ساده‌تر می‌کند و ضمناً نوعی نظم و هماهنگی در نمایش اعداد بزرگ (یا کوچک) به حساب می‌آید.

مثال :

$$۱۲۴۰۰۰ = ۱/۲۴ \times ۱۰^۵$$

$$۱۷۰۰۰۰۰۰۰ = ۱/۷ \times ۱۰^۹$$

$$۱۳۹۳ = ۱/۳۹۳ \times ۱۰^۳$$

$$۹۲۰۴۰۰۰ = ۹/۲۰۴ \times ۱۰^۶$$

$$۱۲۵/۳۹ = ۱/۲۵۳۹ \times ۱۰^۲$$

قطر متوسط یک سلول گلبول قرمز $۰/۰۰۰۰۰۷$ میلی متر است.

همانند عددهای بزرگ، عددهای کوچک مانند $۰/۰۰۰۰۰۷$ را هم می توان به صورت نماد علمی

$$۰/۰۰۰۰۰۷ = ۷ \times ۱۰^{-۶}$$

نمایش داد، یعنی :

ضخامت یک برگه کاغذ حدود $۰/۰۰۱۶$ سانتی متر است که با نماد علمی آن را به صورت

$$۱/۶ \times ۱۰^{-۳}$$

به طور کلی نماد علمی یک عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times ۱۰^n$ است که در آن

$۱ \leq a < ۱۰$ و n عددی صحیح است.

$$۰/۰۰۰۰۱۲۷۵ = ۱/۲۷۵ \times ۱۰^{-۵}$$

مثال :

$$۰/۰۱۳۷ = ۱/۳۷ \times ۱۰^{-۲}$$

$$۱۲۳ = ۱/۲۳ \times ۱۰^۲$$

$$۲۹۰۰۰ = ۲/۹ \times ۱۰^۴$$

کار در کلاس

۱- هر یک از اعداد داده شده را با نماد علمی نمایش دهید.

$$۲۴۵۰۰۰ =$$

$$۱۵۰,۰۰۰,۰۰۰ =$$

$$۰/۰۰۵ =$$

$$۰/۰۰۰۰۶۱ =$$

$$۱۴۰۴ =$$

$$۰/۱۲۷۵ =$$

۲- نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید.

$$۵/۲ \times ۱۰^{-۳} =$$

$$۷/۳۰۴ \times ۱۰^{-۵} =$$

$$۲/۲۸ \times ۱۰^۴ =$$

$$۹/۴۶۱۲ \times ۱۰^۹ =$$

$$۶/۰۲ \times ۱۰^{-۲} =$$

$$۱/۱ \times ۱۰^۴ =$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}}$$

$$\frac{8^{-1} \times 4^2}{2^{-4} \times \frac{1}{8}}$$

۲- کدامیک درست و کدامیک نادرست است؟

$$1/0.2 \times 10^{-5} = 0.00000102$$

$$5/9 \times 10^{-1} = 0.59$$

$$4/3 \times 10^2 = 4300$$

$$7/0.04 \times 10^{-2} = 0.7004$$

$$6/18 \times 10^7 = 61800000$$

$$8/2570 \times 10^4 = 82570$$

۳- شعاع خورشید تقریباً 695000 کیلومتر است. این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۴- اندازه یک باکتری 0.0000005 متر است. این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۵- قطر خورشید حدود $1/4 \times 10^9$ متر و قطر زمین حدود $1/3 \times 10^7$ متر است. قطر خورشید

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید.

$$2 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^9$$

$$\frac{12/5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}}$$

۷- فاصله مریخ از زمین $9/17 \times 10^7$ کیلومتر و فاصله کیوان از زمین $6/287 \times 10^8$ کیلومتر

است. کدام سیاره به زمین نزدیک‌تر است؟

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$$2/7 \times 10^0 > 0.2 \quad \text{ب) } 0.3 > 0.03 \times 10^0$$

۹- از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$$1/5 \times 10^{-2}, 1/2 \times 10^6, 5/35 \times 10^{-3}, 3/7 \times 10^{-2}$$

فعالیت

۱- مانند نمونه‌ها حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-3)^2 = 9 \quad (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$(-\sqrt{5})^2 = \quad \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \quad 4^2 = \quad (-4)^2 =$$

مربع (توان دوم) اعداد ۳ و -۳ برابر ۹ است. اعداد ۳ و -۳ را ریشه‌های دوم عدد ۹ می‌نامند. همان گونه که در سال‌های گذشته دیده‌اید ریشه‌های دوم ۹ را با $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ نمایش می‌دهند و داریم:

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{و} \quad -\sqrt{9} = -3$$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید:

عدد	۳	-۳			$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$				
مربع عدد (توان دوم)	۹		۱۶						$\frac{1}{49}$		۶	

ریشه‌های دوم عدد $\frac{4}{9}$ ، اعداد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ هستند. ریشه‌های دوم ۷، اعداد $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$ هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم $\sqrt{0} = 0$.

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{b} و $-\sqrt{b}$ را ریشه‌های دوم b می‌نامند. همان طور که می‌دانید اعداد منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۲	-۲	۳	-۳		$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	۵	$-\frac{2}{3}$	۰
مکعب عدد (توان سوم)	۸	-۸			۶۴					

توان سوم (مکعب) عدد ۲ برابر ۸ است، یعنی $2^3=8$. ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم $\sqrt[3]{8}=2$. همچنین چون $(-2)^3=-8$ ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲- است و می‌نویسیم $\sqrt[3]{-8}=-2$. به عبارت دیگر با آنکه اعداد منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول بالا دیده می‌شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر و ریشه سوم عدد $-\frac{1}{27}$ عدد است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\sqrt[3]{64} = \quad \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \quad \sqrt[3]{125} = \quad \sqrt[3]{-27} =$$

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می‌دهیم هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

کار در کلاس

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\begin{aligned} \sqrt{81} = \quad \sqrt{4^2} = \quad \sqrt{(-4)^2} = \quad \sqrt{-1} = \\ \sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \quad \sqrt[3]{6^3} = \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = \quad \sqrt[3]{(-7)^3} = \end{aligned}$$

۲- به کمک رابطه $\sqrt{x^2} = |x|$ که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \sqrt{(-6)^2} = \quad \sqrt{8^2} = \quad \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \\ \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \quad \sqrt{(2-9)^2} = \quad \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \end{aligned}$$

۳- حاصل عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید. یکی از حالات

حل شده است.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \quad \text{آ) } x \text{ و } y \text{ هر دو مثبت هستند } (x > 0, y > 0). \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x - y \quad \text{ب) } x \text{ مثبت و } y \text{ منفی است } (x > 0, y < 0). \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \quad \text{ج) } x \text{ منفی و } y \text{ مثبت است } (x < 0, y > 0). \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \quad \text{د) } x \text{ و } y \text{ هر دو منفی هستند } (x < 0, y < 0). \end{aligned}$$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت a و b رابطه‌های زیر را یاد گرفتید :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشه سوم برقرارند :

فعالیت

با توجه به عددهای داده شده a و b مانند نمونه جدول زیر را کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر جدول چه حدسی می‌زنید؟

a	$\sqrt[3]{a}$	b	$\sqrt[3]{b}$	ab	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
۸	۲	۱۲۵	۵	۱۰۰۰	۱۰	$۲ \times ۵ = ۱۰$
۲۷		$\frac{1}{8}$				
-۸		۲۷				

به‌طور کلی برای هر دو عدد a و b داریم : $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ ، همچنین اگر

$b \neq 0$ داریم :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

کار در کلاس

۱- آیا رابطه مقابل درست است؟

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{۲۷} = \sqrt[3]{8+۲۷}$$

استدلال زیر برای نادرستی رابطه بالا را بررسی کنید و آن را توضیح دهید :

«رابطه برقرار نیست. زیرا سمت چپ تساوی مساوی ۵ است در حالی که سمت راست کمتر

از ۴ (یعنی $\sqrt[3]{۶۴}$) است.»

۲- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید :

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt{\dots} =$$

$$\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{-8} = \dots$$

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{\dots} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{\dots}$$

$$\sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{64}} = \dots$$

$$\sqrt[3]{\frac{-54}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-54}{2}} = \sqrt{-27} = \dots$$

تمرین

۱- ریشه‌های دوم اعداد زیر را بیابید.

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

۲- ریشه سوم اعداد زیر را به دست آورید.

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 10$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$\sqrt{(-1)^2} = -1$	$\sqrt[3]{(-1)^3} = -1$	$\sqrt{(-5)^2} = -5 = 5$	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
$-\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$	$\sqrt{1/44} = 1/2$	$(\sqrt{-1})^2 = 1$	$\sqrt[3]{-64} = -4$

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن وصل کنید :

$$\sqrt[3]{125} \times \sqrt{36}$$

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{81}$$

$$\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$$

$$\sqrt{-25} \times \sqrt{5}$$

۳

۳۰

-۹

-۵

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست

باشد.

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4}$$

۶- رابطه $\sqrt{(-x)^2} = x$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

۷- اگر مساحت کل یک مکعب $96a^2$ باشد، حجم آن را بر حسب a به دست آورید.

۸- حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

۹- مانند نمونه عبارت‌های زیر را ساده کنید: $\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$

$$\sqrt{150}, \quad \sqrt{80}, \quad \sqrt{24}, \quad \sqrt[3]{125^2}$$

۱۰- آیا تساوی‌های زیر درست است؟

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید:

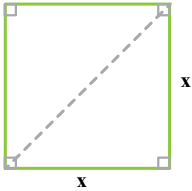
$$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} =$$

$$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{5}} =$$

فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن $2\sqrt{6}$ متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید:



حل: به کمک رابطه داریم: $x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$

در نتیجه: $2x^2 = 24$ و از آنجا $x^2 = 12$

بنابراین این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که مربع $\sqrt{12}$ متر یا $2\sqrt{3}$

متر است.

همچنین: متر $8\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ = مربع

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشند می‌توان آنها را با هم جمع یا تفریق کرد. مثلاً دو عبارت $3\sqrt{2}$ و $7\sqrt{2}$ دارای قسمت‌های رادیکالی یکسان هستند و داریم:

$$7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \quad \text{و} \quad 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

همچنین:

$$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات $2\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}$ یا عبارات $7\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ یکسان نیستند.

کار در کلاس

مانند نمونه‌ها حاصل جمع هر ستون را در سطر آخر بنویسید:

$3\sqrt{7}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$3\sqrt{a}$	\sqrt{xy}	$\sqrt{2}$
$-4\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{b}$	$2\sqrt{x}$	$\sqrt{3}$
$8\sqrt{7}$	$8\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{10}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{a}$	$-7\sqrt{x}$	$\sqrt{5}$
$2\sqrt{5}$	$-5\sqrt{2}$	$-2\sqrt{10}$	$-7\sqrt{b}$	$4\sqrt{xy}$	$6\sqrt{2}$
$11\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}$				

ساده کردن عبارت‌های رادیکالی

فعالیت

حاصل عبارات زیر را ساده کنید.
راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید. اگر روش دیگری می‌دانید آن را در کلاس مطرح کنید.

$$\text{آ) } \sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$$

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم:
(جاهای خالی را کامل کنید.)

$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{\dots\dots}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \times \dots\dots} = 4\sqrt{\dots\dots}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{\dots\dots} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = 6\sqrt{\dots\dots} - \dots\dots + \dots\dots = 5\sqrt{2} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \sqrt{50} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} &= \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3} \\ &= 5\sqrt{\dots\dots} + 2\sqrt[3]{\dots\dots} + 3\sqrt[3]{\dots\dots} = 5\sqrt{\dots\dots} + 5\sqrt[3]{\dots\dots} \end{aligned}$$

مثال‌ها: حاصل $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ را به دو روش به دست آورده‌ایم. آنها را با هم مقایسه کنید:

$$\begin{aligned} \text{آ) } \sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) &= \sqrt{48 \times 3} + \sqrt{48 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 3^2} + \sqrt{4^2 \times 3 \times 2} \\ &= \sqrt{(4 \times 3)^2} + 4\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{4^2 \times 3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12 + 4\sqrt{6}$$

ج) حاصل $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3}$ را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)

حاصل عبارت های زیر را ساده کنید :

$$۱) \sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128}$$

$$۲) \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$$

$$۳) ۵\sqrt{2} + ۳\sqrt{54} - ۴\sqrt{128}$$

$$۴) \sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}}$$

$$۵) (\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

گویا کردن مخرج کسره‌های رادیکالی

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا ساده کردن محاسبات لازم است که مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم. به طور مثال برای محاسبه $\frac{20}{\sqrt{2}}$ باید عدد ۲۰ را بر $\sqrt{2}$ تقسیم کنیم در حالی که می‌توانیم مخرج کسر را به صورت زیر گویا کنیم :

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسره‌های زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است حل را کامل کنید :

$$آ) \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$ب) \frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$ج) \frac{4}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dots\dots\dots$$

$$د) \frac{2\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{2^2}} \times \frac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{14}} = \frac{2\sqrt[3]{14}}{2} = \dots\dots\dots$$

$$ه) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2x}}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$و) \frac{5}{\sqrt[3]{z^2}} \times \frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z}} = \frac{5\sqrt[3]{z}}{z} \quad (z \neq 0)$$

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید :

آ) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$

ب) $\frac{2}{\sqrt{32}}$

ج) $\frac{12}{\sqrt{6}}$

د) $\frac{5}{\sqrt[3]{3x}}$

($x \neq 0$)

تمرین

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

آ) $2\sqrt{50} \times \sqrt{32} \times 2\sqrt{72}$

ج) $\sqrt[3]{27^2}$

ه) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$

د) $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$

و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$

$2\sqrt{x^2} - x$

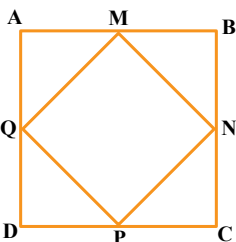
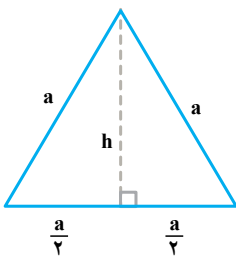
۲- اگر $x < 0$ حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

۳- محیط و مساحت مربعی به طول $3\sqrt{5}$ سانتی متر را به دست

آورید.

۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را نشان

می‌دهد. اندازه ارتفاع h را بر حسب a به دست آورید.



۵- نقاط M, N, P, Q وسط‌های اضلاع مربع $ABCD$

هستند. اگر مساحت مربع $ABCD$ ، 100 مترمربع باشد، مساحت مربع

$MNPQ$ چقدر است؟

۶- در جاهای خالی علامت $<$ ، $=$ یا $>$ بگذارید.

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} \bigcirc \sqrt{5+4}$$

$$4 \bigcirc \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} \bigcirc \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \bigcirc 5$$

۷- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید:

$$\text{آ) } \sqrt{\dots} = 10 \quad \text{ب) } 2\sqrt{\dots} = 6 \quad \text{ج) } \sqrt{\dots} = \frac{1}{3} \quad \text{د) } \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\text{هـ) } \frac{2^{-5}}{2 \bigcirc} = \sqrt{64} \quad \text{و) } \frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3 \bigcirc \quad \text{ز) } \frac{m^6 \times m^{-2}}{m \bigcirc} = m \quad \text{ح) } 9\sqrt{-27} = \frac{\bigcirc^3}{(-4)^3}$$

۸- مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید:

$$\text{آ) } \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}}$$

$$\text{ج) } \frac{2}{\sqrt{v}}$$

۹- در مورد تساوی $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2}$ کدام گزاره درست است. توضیح دهید.

آ) تساوی همیشه درست است. ب) تساوی همیشه نادرست است. ج) اگر $x \geq 0$ تساوی درست

است.

فناوری نانو مجموعه‌ای از فرایندهای تفکیک، ادغام و تشکیل مواد در حد یک اتم یا مولکول است. یک نانومتر برابر 10^{-9} متر یعنی صدهزار برابر کوچک‌تر از قطر موی سر انسان است. کشور عزیز ما ایران در بین ۱۰ کشور برتر در حوزه فناوری نانو قرار دارد.